Matemáticas básicas para química y física

Esta guía contempla los conceptos de unidades de medida y conversión, proporcionalidad, ecuaciones de primer-segundo grado y logaritmos.

Este apunte trata las unidades matemáticas que son utilizadas con mayor frecuencia en la solución de problemas de física y química, cursos del primer ciclo de la carrera de Odontología.

S. FARIAS - R. MORAGA

CONCEPCION – 2018.

Matemáticas básicas para química y física

Ciclo de reforzamiento de matemáticas

Material de estudio

Es nuestra intención acompañarte y entregarte las herramientas necesarias para que, inicies con responsabilidad el camino de la vida universitaria de la mejor forma posible.

Se preparó esta guía para dar inicio al ciclo de ciencias básicas, especialmente física y química, de manera que puedas repasar algunos conceptos matemáticos que aprendiste en la enseñanza básica y media que se utilizan frecuentemente en la solución de problemas de ciencias fundamentales. Estos conceptos serán un punto de partida para tu mejorar tu proceso de enseñanza - aprendizaje y llevar a buen término tus asignaturas de primer año.

Nos comprometemos a acompañarte, ayudarte, aclarar tus dudas, orientarte en la búsqueda de información que sea necesaria, y colaborar en tu proceso de resolución de los ejercicios propuestos, dándote toda la información necesaria para que aquellos conocimientos que recuerdes menos o que aún no hayas adquirido, puedas incorporarlos al comienzo de tu asignatura.

Te recomendamos leer la guía, estudiar los ejercicios resueltos y realizar los ejercicios propuestos, asistir a las clases teóricas, consultar las dudas que tengas, (recuerda que es un espacio de aprendizaje, por lo tanto, no hay lugar para el miedo, el orgullo, el ridículo o la vergüenza).

> La matemática es una ciencia exacta salvo cuando te equivocas…
>
> Jaume Perich.

Esto te permitirá involucrarte íntegramente con la nueva actividad que inicias…solo depende de ti.

¡La decisión es solo tuya! ¡Ya estas ejerciendo un derecho fundamental para tu vida: el de elegir que vas a hacer para construir tu futuro!

Siempre cuentas con nuestro apoyo, colaboración y compañía… nuevamente te decimos ¡Bienvenido!

INDICE DE CONTENIDOS

UNIDADES DE MEDIDA Y CONVERSIONES

MEDICIONES

Para la física y la química, en su calidad de ciencias experimentales, la medida constituye una operación fundamental. Sus descripciones del mundo físico se refieren a magnitudes o propiedades medibles.

Magnitud, cantidad y unidad.

Se denominan magnitudes a ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresados en forma numérica. La longitud, la masa, el volumen, la fuerza, la velocidad, la cantidad de sustancia, son ejemplos de magnitudes físicas.
En el lenguaje de la física, la noción de cantidad se refiere al valor que toma una magnitud dada en un cuerpo o sistema concreto; la longitud y masa de una mesa, el volumen del libro, son ejemplos de cantidades. Una cantidad de referencia se denomina unidad, y el sistema físico que encarna la cantidad considerada como una unidad se denomina patrón.

La medida de una magnitud física supone la comparación del objeto con otro de la misma naturaleza, que se toma como referencia y que constituye el patrón.

Tipos de magnitudes

Magnitudes escalares, son aquellas que quedan perfectamente determinadas cuando se expresa su cantidad mediante un número seguido de la unidad correspondiente. La longitud (5[m]), el volumen (2[L]), la masa (10[g]), la temperatura (298,15[K]), la energía ($4,5x10^{-19}$ [J]), son algunos ejemplos.

Magnitudes vectoriales, son aquellas que precisan para su total definición que se especifique, además de los elementos anteriores, una dirección o una recta de acción y un sentido. La fuerza, constituye un ejemplo de este tipo de magnitud, pues sus efectos al actuar sobre un cuerpo dependerán no sólo de su cantidad, sino también de la línea a lo largo de la cual se ejerza su acción.
Al igual que los números reales son utilizados para representar cantidades escalares, las cantidades vectoriales requieren el empleo de otros elementos matemáticos diferentes de los números, con mayor capacidad de descripción. Estos elementos matemáticos que pueden representar intensidad, dirección y sentido se denominan **vectores**. Las magnitudes que se manejan en la vida diaria son, por lo general, escalares.

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

Cada científico o cada país podría operar con su propio sistema de unidades, sin embargo, existe una tendencia generalizada a adoptar un mismo sistema de unidades con el fin de facilitar la cooperación y comunicación en el terreno científico y técnico. El Sistema Internacional (SI) que distingue y establece, las magnitudes básicas y derivadas.

El **SI** toma como magnitudes fundamentales: *la longitud, la masa, el tiempo, la intensidad de corriente eléctrica, la temperatura absoluta, la intensidad luminosa y la cantidad de sustancia*, y fija las correspondientes unidades para cada una de ellas.

Unidades fundamentales

Las siguientes son las siete unidades fundamentales, y a continuación se realiza una breve descripción de cada una de ellas.

- **Unidad de Longitud:** El metro [m] es la longitud recorrida por la luz en el vacío durante un período de tiempo de 1/299.792.458 [s].

- **Unidad de Masa:** El kilogramo [kg] es la masa del prototipo internacional de platino iridiado que se conserva en la Oficina de Pesas y Medidas de París.

- **Unidad de Tiempo:** El segundo [s] es la duración de 9.192.631.770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles fundamentales del átomo Cesio 133 (^{133}Cs).

- **Unidad de Corriente Eléctrica:** El ampere [A] es la intensidad de corriente, la cual, al mantenerse entre dos conductores paralelos, rectilíneos, longitud infinita, sección transversal circular despreciable y separados en el vacío por una distancia de un metro, producirá una fuerza entre estos dos conductores igual a 2 x10^{-7}[N] por cada metro de longitud.

- **Unidad de Temperatura Termodinámica:** El Kelvin [K] es la fracción 1/273,15 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

- **Unidad de Intensidad Luminosa:** La candela [cd] es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540 $x10^{12}$[Hertz] y que tiene una intensidad energética en esta dirección de 1/683[W] por estereorradián [sr].

- **Unidad de Cantidad de Sustancia:** El mol es la cantidad de materia contenida en un sistema y que tiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012[kg] de carbono 12 (^{12}C). Cuando esta magnitud es utilizada, deben ser especificadas las entidades elementales, y las mismas pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o grupos de tales partículas.

Tabla 1: Unidades del Sistema Internacional de Unidades

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

Las **unidades derivadas** han recibido nombres y símbolos especiales. Las mismas pueden ser utilizadas en combinación con otras unidades fundamentales o derivadas para expresar unidades de otras cantidades. Algunas de ellas se muestran a continuación:

- **Coulomb [C]:** Cantidad de electricidad transportada en un segundo por una corriente de un amperio.

- **Joule [J]**: Trabajo producido por una fuerza de un newton cuando su punto de aplicación se desplaza la distancia de un metro en la dirección de la fuerza.

- **Newton [N]**: Es la fuerza que, aplicada a un cuerpo que tiene una masa de 1 [kg], le comunica una aceleración de 1 metro por segundo, cada segundo.

- **Pascal [Pa]**: Unidad de presión. Es la presión uniforme que, actuando sobre una superficie plana de 1 [m^2], ejerce perpendicularmente a esta superficie una fuerza total de 1[N].

- **Volt [V]**: Unidad de tensión eléctrica, potencial eléctrico, fuerza electromotriz. Es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un hilo conductor que transporta una corriente de intensidad constante de 1[A] cuando la potencia disipada entre esos puntos es igual a 1[W].

- **Watt [W]**: Potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1[J/s].

- **Ohm [Ω]**: Unidad de resistencia eléctrica. Es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1[V] aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1[A], cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor.

Prefijos De Potencias Positivas Y Negativas.

Las unidades del **SI** cambian en forma decimal por medio de una serie de prefijos, que actúan como múltiplos y submúltiplos decimales. Estos prefijos se colocan delante del símbolo de la unidad correspondiente, sin espacio intermedio. El conjunto del símbolo más el prefijo equivale a una nueva unidad que puede combinarse con otras unidades y elevarse a cualquier exponente (positivo o negativo).

Tabla 2: Prefijos del Sistema Internacional de Unidades

Múltiplos decimales			Submúltiplos decimales		
Prefijo	**Símbolo**	**Factor**	**Prefijo**	**Símbolo**	**Factor**
Deca	da	10^1	Deci	d	10^{-1}
Hecto	h	10^2	Centi	c	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Mili	m	10^{-3}
Mega	M	10^6	Micro	μ	10^{-6}
Giga	G	10^9	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Pico	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto	a	10^{-18}
Zetta	Z	10^{21}	Zepto	z	10^{-21}
Yotta	Y	10^{24}	Yocto	y	10^{-24}

Tabla 3: Prefijos del Sistema Internacional de Unidades, con equivalencia decimal.

10^n	Prefijo	Símbolo	Equivalencia decimal
10^{24}	Yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	Zetta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	Exa	E	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	Peta	P	1 000 000 000 000 000
10^{12}	Tera	T	1 000 000 000 000
10^{9}	Giga	G	1 000 000 000
10^{6}	Mega	M	1 000 000
10^{3}	Kilo	k	1 000
10^{2}	Hecto	h	100
10^{1}	Deca	da	10
10^{-1}	Deci	d	0,1
10^{-2}	Centi	c	0,01
10^{-3}	Mili	m	0,001
10^{-6}	Micro	µ	0,000 001
10^{-9}	Nano	n	0, 000 000 001
10^{-12}	Pico	p	0,000 000 000 001
10^{-15}	Femto	f	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	Atto	a	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	Zepto	z	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	Yocto	y	0,000 000 000 000 000 000 000 001

Los símbolos que corresponden a unidades derivadas de nombres propios se escriben con la letra inicial mayúscula (ejemplos: A, V, etc.). Siempre con letras a excepción del ohm. Los demás símbolos se escriben con letras minúsculas.
Los símbolos de las unidades no cambian de forma para el plural (no incorporan ninguna "s") y no van seguidos de punto.

Las unidades derivadas se definen como productos o cocientes de las unidades básicas o suplementarias, aunque también pueden utilizarse unidades suplementarias con nombre propio. Para expresar las unidades derivadas pueden utilizarse los siguientes métodos:

- Ubicar las diferentes unidades una a continuación de otra sin separación; por ejemplo: As, Nm. En este caso se deben evitar las combinaciones en que una unidad que tiene el mismo símbolo que un prefijo se coloque delante ya que pueden dar lugar a confusión. Por ejemplo, no debe utilizarse mN (que significa milinewton) en lugar de Nm (newton por metro).

- Poner las diferentes unidades separadas por un punto alto; por ejemplo: A • s, N • m. Esta disposición es preferible a la anterior. En este caso también conviene evitar las combinaciones que puedan dar lugar a confusión si el punto es poco visible (así hay que evitar, por ejemplo, m • N).

- En el caso de cocientes puede utilizarse:

  - Un cociente normal
  - La barra inclinada (m/s, m/s^2)
  - Potencias negativas; por ejemplo: $m \cdot s^{-1}$; $m \cdot s^{-2}$

MANEJO DE LOS NÚMEROS

Analicemos las técnicas para el manejo de los números asociados a las mediciones: la **notación científica**. Es muy frecuente en esta área trabajar con números muy grandes o muy pequeños.

Por ejemplo:

En 16[g] de oxígeno (1[mol] de átomos) hay 602.200.000.000.000.000.000.000 átomos de oxígeno, y cada átomo tiene una masa de 0,0000000000000000000000266[g].

Como verás, el manejo de estos números es engorroso, lo que facilita que se cometan errores al realizar cálculos. Puede suceder que te olvides de un cero, o que coloques uno o más ceros después del punto decimal. Por esta razón, para manejar dichos números, se utiliza la llamada **Notación Científica**. Sin importar su magnitud, todos los números en formato decimal se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\boxed{\mathbf{N\ x10^{n}}}$$

*donde **N** es un número comprendido entre 1 y 9, (es decir, distinto de cero) y **n** es un exponente, que debe ser un número entero positivo o negativo*.
En los dos ejemplos antes mencionados, dichos números expresados en notación científica son $6{,}022\ x10^{23}$ [átomos] de oxígeno y $2{,}66\ x10^{-23}$ [g].

¡Pero **CUIDADO**! La expresión "**x10**", no significa que debes multiplicar el número x10 y luego elevarlo al exponente escrito, ya que de esa manera estarías agregando un cero más al número. Esto, en la calculadora, se trabaja con la tecla que dice **EXP**, la cual se encuentra generalmente al lado del signo igual.

Ejemplo: En el caso que la notación científica sea 1,3 $x10^5$, el exponente es **5** y el mismo indica el número de posiciones que hay que desplazar la coma para obtener el número en forma decimal. El signo que acompaña al exponente indica la dirección hacia donde debe desplazarse la coma:

- **Si es positivo,** la coma se corre a la **derecha**, 1,3 $x10^5$ = 130000, en la calculadora se escribe: **1.3exp5**

- **Si es negativo,** la coma se corre a la **izquierda**, 1,3 $x10^{-5}$ = 0,000013, en la calculadora se escribe: **1.3exp (-)5**

A continuación, se muestran dos ejemplos de cómo utilizar la notación científica, con las unidades:

Ejemplo 1: Convertir 350[kg] a [g]

Como vimos en la Tabla 2, para el símbolo "k", que representa el prefijo "kilo", el factor es **10^3**. Esto quiere decir que, para pasar de kg a g, se le agrega a 350 el factor correspondiente (10^3), y automáticamente la cifra queda expresada en gramos:

$$350\ \mathbf{[kg]} \rightarrow 350\ \mathbf{x10^3\ [g]}\ \mathbf{=}\ 3{,}5\ x10^2\ \mathbf{x10^3\ [g]}\ \mathbf{=}\ 3{,}5\ \mathbf{x10^5[g]}\ \mathbf{=}\ \mathbf{50000[g]}$$

Ejemplo 2: Convertir 45 mL a L

Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, para el símbolo "m", que representa el prefijo "mili", el factor es **10^{-3}**. Esto quiere decir que, para pasar de mL a L, se le agrega a 45 el factor correspondiente (10^{-3}), y automáticamente la cifra queda expresada en litros:

$$45\ \mathbf{[mL]} \rightarrow 45\ \mathbf{x10^{-3}\ [L]}\ \mathbf{=}\ 4{,}5\ \mathbf{x10^{-2}\ [L]}\ \mathbf{=}\ \mathbf{0{,}045\ [L]}$$

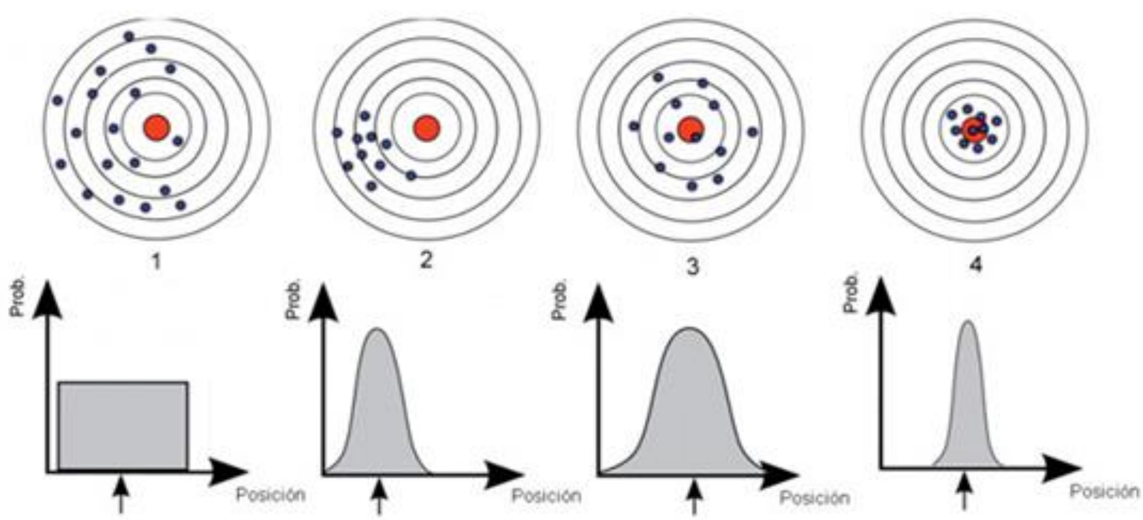
EXACTITUD Y PRECISIÓN

La **precisión** nos indica en cuanto concuerdan dos o más mediciones de una misma cantidad. Se relaciona con la dispersión de datos obtenidos y depende, por lo general, del instrumento de medición. Mientras que la **exactitud** indica cuán cercana está una medición del valor real de la cantidad medida.

***Ejemplo*:** A un estudiante se le solicita que pese en balanza analítica una muestra de sal común, cuyo peso real es 2,0000[g]. El estudiante realiza tres mediciones obteniendo: 2,0001[g], 1,9998[g] y 2,0001[g]. Podemos decir que el estudiante fue preciso, ya que obtuvo en las tres mediciones valores que concuerdan entre si y también trabajó con exactitud, ya que los valores obtenidos están muy próximos al valor real.

Cabe aclarar que precisión y exactitud deben ir de la mano, para que nuestros resultados sean confiables, pero no siempre es así, uno puede ser muy preciso y no exacto. Se puede comparar con tiro al blanco, al realizar los tiros se puede dar siempre en el mismo lugar (precisión), pero estar muy lejos del centro. Se es muy preciso, pero no exacto.

Ni exacto	**Preciso**	**Exacto**	**Exacto**
Ni preciso	**Sin exactitud**	**Sin precisión**	**y Preciso**



CIFRAS SIGNIFICATIVAS

El valor numérico de cualquier medida es una aproximación. Ninguna medida física, como masa, longitud o tiempo es absolutamente correcta. La exactitud de toda medición está limitada por el instrumento utilizado para realizarla.
Excepto cuando se trabaja con números enteros (ejemplo número de alumnos en una sala de clases), en el resto de los casos es imposible obtener el valor exacto de la cantidad buscada. Por esta razón, es importante indicar el margen de error o de incertidumbre en las mediciones, señalando claramente el número de cifras significativas, que son los dígitos significativos en una cantidad medida o calculada.

Por ejemplo: supongamos que medimos un volumen de 7[mL] con una probeta. Si la escala de la probeta es de 1[mL] en 1[mL] (es decir, una cifra significativa), el valor real se hallará entre 6,5[mL] y 7,5[mL]. Esto denota el grado de precisión del instrumento de medición, que en este caso es una probeta. Como vemos, tener presente el número de cifras significativas en una medición, asegura que los cálculos realizados con los datos reflejen la precisión de esa medición.

Probeta

Guía práctica para utilizar las cifras significativas:

- Por convención, cuando un número se expresa con sus cifras significativas, el último digito es incierto.

- Cualquier dígito diferente de cero es significativo. Así, 4687[cm] tiene cuatro cifras significativas; 9,32[kg] tiene tres cifras significativas.

- Los ceros ubicados entre dígitos distintos de cero son significativos. Así, 806[m] tiene tres cifras significativas; 70201[s] tiene cinco cifras significativas.

- Los ceros a la izquierda del primer dígito distinto de cero no son significativos, en este caso, los mismos se utilizan para indicar el lugar del punto decimal. Por ejemplo 0,078[g], ($7{,}8x10^{-2}$[g]) tiene dos cifras significativas; 0,00000236[g] ($2{,}36x10^{-6}$[g]) tiene tres cifras significativas.

- Si un número es **mayor que 1**, todos los ceros escritos a la derecha del punto decimal son significativos. Así 6,00 [mL] tiene tres cifras significativas; 40610[mg] tiene cinco cifras significativas y 70,90[s] tiene cuatro cifras significativas.

- Si un número es **menor que 1**, solo son significativos los ceros que están al final del número o entre dígitos. Así, 0,801[g] tiene tres cifras significativas; 0,0060[kg] tiene dos cifras significativas.

- Para números sin punto decimal, los ceros ubicados después del último dígito pueden o no ser cifras significativas. Así en 200[mL] puede tener una (el 2), dos (20) o tres (200) cifras significativas. No es posible determinar la cantidad correcta, si no se posee más información. Por esta razón es de mucha utilidad la notación científica, para evitar esta ambigüedad. En nuestro caso podemos expresar 2 x10^2[mL], para una cifra; 2,0 x10^2, para dos cifras o 2,00 x10^2 para tres cifras significativas.

Ejercicios propuestos

Para las siguientes unidades de medida, indique la "cantidad física" a la que se asocia.

a) mm ________________ b) mg ________________

c) mL ________________ d) °F ________________

e) kg/m^3 ________________ f) mmHg ________________

g) mol ________________ h) g/mol ________________

R: a) longitud b) masa c) volumen d) temperatura
e) densidad f) presión g) cantidad de materia h) masa molar

Transforme las siguientes cantidades a la unidad de medida correspondiente:

a) 0,043[km] a [cm]

b) 6,8 [m^3] a [mL]

c) 0,00362 [Ton] a [g]

R: a) 4300[cm] b) 6.800.000[mL] c) 3620[g]

NOTACIÓN CIENTÍFICA

• La expresión de un número en notación científica consiste en representarlo como un número entero o un número decimal, con una sola cifra entera, multiplicado por una potencia de 10 (positiva o negativa).

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 0{,}001$$

• Llamamos orden de magnitud de un número expresado en notación científica al exponente de la potencia de 10.

Ejemplo:

Expresa en notación científica el número 33.270.000.

Desplazamos la coma siete lugares a la izquierda y multiplicamos por 10^7.

NOTACIÓN DECIMA NOTACIÓN CIENTÍFICA

$$33.270.000 = 3{,}327 \cdot 10^7$$

PARTE DECIMAL POTENCIA DE 10

El orden de magnitud del número anterior es 7, ya que el exponente de la potencia de 10 es 7.

1. Transforma las siguientes potencias en números decimales.
   $a)$ $10^3 = 1.000$

   $b)$ $10^4 =$

   $c)$ $10^6 =$

$d)$ $10^{-4} = 0{,}0001$

$e)$ $10^{-7} =$

$f)$ $10^{-3} =$

R: b) 10.000 c) 1.000.000 e) 0,0000001 f) 0,001

2. Escribe por extensión, estos números expresados en notación científica
$a)$ $2{,}51 \cdot 10^{6} = 2.510.000$

$b)$ $9{,}32 \cdot 10^{8} =$

$c)$ $1{,}01 \cdot 10^{3} =$

$d)$ $1{,}15 \cdot 10^{-4} = 0{,}000115$

$f)$ $5{,}34 \cdot 10^{-2} =$

$g)$ $2{,}354 \cdot 10^{-9} =$

R: b) 932.000.000 c) 1.010

f) 0,0534 g) 0,000000002354

3. ¿Cuál de estos números es mayor?
$7{,}1 \cdot 10^{-3}$ $4{,}2 \cdot 10^{-2}$ $1{,}2 \cdot 10^{-4}$

R: $4{,}2 \cdot 10^{-2}$

4. Los siguientes números no están correctamente escritos en notación científica. Escríbelos de la forma adecuada.

Número	Expresión correcta
$12{,}3 \cdot 10^{15}$	
$0{,}6 \cdot 10^{-9}$	
$325 \cdot 10^{3}$	
$0{,}0028 \cdot 10^{-2}$	
$634{,}12 \cdot 10^{4}$	
$1{,}3 \cdot 10^{3}$	

R: $1{,}23 \cdot 10^{16}$; $6 \cdot 10^{-10}$; $3{,}25 \cdot 10^{4}$

$2{,}8 \cdot 10^{-5}$; $6{,}3412 \cdot 10^{6}$; $1{,}3 \cdot 10^{3}$

5. Expresa en notación científica.
   a) Mil trescientos cuarenta billones de millas.

   b) Doscientas cincuenta milésimas de segundos.

   c) Treinta y siete metros cuadrados.

   d) Cuarenta y tres millones de Hertz.

   e) Seiscientos ochenta mil Newtons.

   f) Tres billonésimas de litros.

R: a) $1{,}34 \cdot 10^{15}$ mi   b) $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ s   c) $3{,}7 \cdot 10^{1}$ m^2

d) $4{,}3 \cdot 10^{7}$ Hz   e) $6{,}8 \cdot 10^{5}$ N   f) $3 \cdot 10^{-12}$ L

Indica el orden de magnitud de cada uno de estos números.

$a)\ 111{,}3 \cdot 10^3 =$

$b)\ 0{,}610 \cdot 10^{-4} =$

$c)\ 307{,}2 \cdot 10^7 =$

$d)\ 856 \cdot 10^{-5} =$

$e)\ 1{,}26 \cdot 10^4 =$

$f)\ 199{,}877 \cdot 10^{-2} =$

R:	a) 5	b) -5	c) 9
	d) -3	e) 4	f) 0

Realizar Sumas Y Restas En Notación Científica

Realizar cálculos con números escritos en notación científica es muy fácil: basta con operar, por un lado, con los números que aparecen antes de la potencia de 10 y, por otro, con las potencias.

Sumar y restar en notación científica

Para sumar (o restar) números en notación científica se reducen al orden de magnitud del mayor y, luego, se suman (o restan) los números decimales y se mantiene la misma potencia de 10.

Ejemplo:

Realiza las siguientes operaciones de suma y diferencia.

$3{,}5 \cdot 10^3 + 5{,}2 \cdot 10^3 = (3{,}5 + 5{,}2) \cdot 10^3 = 8{,}7 \cdot 10^3$

Si los exponentes de las potencias son iguales, se suman/restan los números decimales y se deja la misma potencia de base 10.

$1{,}7 \cdot 10^4 - 3{,}2 \cdot 10^3 = 1{,}7 \cdot 10^4 - 0{,}32 \cdot 10^4 = (1{,}7 - 0{,}32) \cdot 10^4 = 1{,}38 \cdot 10^4$

Si los exponentes de las potencias son diferentes, se reduce al mayor. Luego se suman/restan los números decimales y se deja la potencia de base 10.

1. Realiza estas sumas y restas.

$a)\ 1{,}9 \cdot 10^5 + 3{,}2 \cdot 10^7 =$

$b)\ 6 \cdot 10^{-4} - 4{,}5 \cdot 10^{-2} =$

$c)\ 17.000 + 3{,}2 \cdot 10^3 - 232 \cdot 10^2 =$

$d)\ 0{,}00035 - 5{,}7 \cdot 10^{-4} + 7{,}2 \cdot 10^{-3} =$

R: a) $3{,}219 \cdot 10^7$ b) $-4{,}4 \cdot 10^{-2}$

c) $-3 \cdot 10^3$ d) $6{,}98 \cdot 10^{-3}$

2. Realiza las operaciones en notación científica.

$a)\ 37{,}3 \cdot 10^{6} - \boxed{} = 8{,}4 \cdot 10^{5}$

$b)\ 9{,}32 \cdot 10^{-3} + \boxed{} = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$

$c)\ 1{,}15 \cdot 10^{4} + \boxed{} = 3 \cdot 10^{5}$

$d)\ 10{,}6 \cdot 10^{12} - \boxed{} = 2 \cdot 10^{12}$

R:
a) $3{,}646 \cdot 10^{7}$ b) $4{,}668 \cdot 10^{-2}$
c) $2{,}885 \cdot 10^{5}$ d) $8{,}6 \cdot 10^{12}$

Realizar Multiplicaciones Y Divisiones En Notación Científica

Multiplicar en notación científica

Para multiplicar números en notación científica se multiplican los números decimales y las potencias de 10. Es decir, se obtiene un número cuya parte decimal es igual al producto de los números decimales, y cuya potencia de 10 tiene un exponente que es igual a la suma de los exponentes de cada una de ellas.

Ejemplo

Multiplicar: $3.457 \cdot (4{,}3 \cdot 10^4)$

Transformamos los números a notación científica: $= (3{,}457 \cdot 10^3) \cdot (4{,}3 \cdot 10^4)$

Agrupamos números decimales y potencias $= (3{,}457 \cdot 4{,}3) \cdot (10^3 \cdot 10^4)$

Multiplicamos para cada paréntesis $= 14{,}8651 \cdot 10^7 =$

Reescribimos el resultado en notación científica $= 1{,}48651 \cdot 10^8$

1. Completa siguiendo el modelo anterior.

$a)\ 13.500.000 \cdot (3{,}5 \cdot 10^5) =$

$b)\ (4{,}5 \cdot 10^5) \cdot 0{,}032 =$

$c)\ 0{,}00013 \cdot 0{,}002 =$

R: a) $3{,}646 \cdot 10^7$ b) $4{,}668 \cdot 10^{-2}$ c) $2{,}885 \cdot 10^5$

2. Realiza los siguientes productos en notación científica.

$a)\ (34 \cdot 10^3) \cdot (25{,}2 \cdot 10^{-2}) =$

$b)\ (8{,}06 \cdot 10^9) \cdot (0{,}65 \cdot 10^7) =$

$c)\ (37{,}3 \cdot 10^{-2}) \cdot (0{,}01 \cdot 10^2) =$

$d)\ (0{,}00000009) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-6}) =$

$e)\ (33{,}57) \cdot (4{,}3 \cdot 10^{-4}) =$

$f)\ (3 \cdot 10^5) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{11}) =$

R: a) $8{,}568 \cdot 10^3$ b) $5{,}239 \cdot 10^{16}$ c) $3{,}73 \cdot 10^{-1}$

a) $1{,}35 \cdot 10^{-13}$ b) $1{,}44351 \cdot 10^{-2}$ c) $7{,}5 \cdot 10^{16}$

Dividir en notación científica

Para dividir números en notación científica se dividen los números decimales y las potencias de diez. Es decir, el número decimal es igual a la división de los números decimales y la potencia de 10 tiene un exponente que es igual a la resta de los exponentes de cada una de ellas.

Ejemplo

Dividir: $(1{,}4 \cdot 10^7) \div (3.200.000)$

Transformamos los números a notación científica: $= (1{,}4 \cdot 10^7) \div (3{,}2 \cdot 10^6)$

Agrupamos números decimales y potencias $= (1{,}4 \div 3{,}2) \cdot (10^7 \div 10^6)$

Dividimos para cada paréntesis $= 0{,}4375 \cdot 10^1$

Reescribimos el resultado en notación científica $= 4{,}375$

3. Realiza las siguientes divisiones en notación científica.

$a)\ (0{,}75 \cdot 10^7) \div (0{,}3 \cdot 10^3) =$

$b)\ (13.650.000.000) \div (6{,}5 \cdot 10^{15}) =$

$c)\ (14.310 \cdot 10^3) \div (5{,}4 \cdot 10^5) =$

$d)\ (9 \cdot 10^6) \div (3 \cdot 10^4) =$

$e)\ (20.100 \cdot 10^3) \div (6{,}7 \cdot 10^5) =$

$f)\ (6 \cdot 10^4) \div (3 \cdot 10^2) =$

$g)\ (15.320) \div (20 \cdot 10^4) =$

$h)\ (6 \cdot 10^{-7}) \div (1{,}2 \cdot 10^5) =$

R:

a) $2{,}5 \cdot 10^4$	b) $2{,}1 \cdot 10^{-6}$	c) $2{,}65 \cdot 10^{-2}$	d) $3 \cdot 10^2$
e) $3 \cdot 10^1$	f) $1{,}8 \cdot 10^7$	g) $7{,}66 \cdot 10^{-2}$	h) $5 \cdot 10^{-12}$

Verifica las conversiones de las unidades de medida de temperatura de la siguiente tabla.

396 [°F]	203,84[°C]	476,99[K]
-12,87 [°C]	260,28[K]	8,83[°F]
541 [K]	514,13°F]	267,85[°C]

Resolución de problemas

I.- Escriba las siguientes cantidades en notación científica y mediante aproximaciones coloque el resultado con dos decimales.

$a)$ $1.250.600,0 =$
$b)$ $0,0620 =$
$c)$ $123,456\ x\ 10^4 =$
$d)$ $65,3\ x\ 10^{-5} =$
$e)$ $393,0\ x\ 10^4 =$
$f)$ $65,3\ x\ 10^{-5} =$

R.

$= 1,25\ x\ 10^6$
$= 6,20\ x\ 10^{-2}$
$= 1,23\ x\ 10^6$
$= 6,53\ x\ 10^{-4}$
$= 3,93\ x\ 10^6$
$= 6,53\ x\ 10^{-4}$

Transformación de unidades de medida de longitud

$\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{38,20[km]\ \ a\ [m]\ y\ [cm]}$

$$38,20[km] = 38,20\ x\ [1km] = 38,20\ x(10^3 m) = 3,82\ x\ 10^4 m$$

$$38,20[km] = 38,20\ x\ [1km] = 38,20\ x(10^6 cm) = 3,82\ x\ 10^7 cm$$

NOTA: 1 km = 1000 m ; 1 m = 100 cm ; 1 cm = 10 mm.

$b)\ 12,56\ [cm]\ a\ [mm]\ y\ [m]$

R: $1{,}26\ x\ 10^{2}[mm]$; $1{,}26\ x\ 10^{-1}[m]$

$c)\ 0,062[m]\ a\ [cm]\ y\ [km]$

R: $6{,}20\ x\ 10^{0}\ [cm]$; $6{,}20\ x\ 10^{-5}\ [km]$

Transformación de unidades de medida de masa

$a)\ 3488,0\ [g]\ a\ [kg]\ y\ [mg]$

$$3488{,}0\ [g] = 3488{,}0\ x\ [1\ g] = 3488{,}0\ x\ [10^{-3}kg] = 3{,}49\ x\ 10^{0}\ kg$$

$$3488{,}0\ [g] = 3488{,}0\ x\ [1\ g] = 3488{,}0\ x\ [10^{3}mg] = 3{,}49\ x\ 10^{6}mg$$

NOTA: 1 Ton = 1000 kg ; 1 kg = 1000 g ; 1 g = 1000 mg.

$b)\ 0,049\ [kg]\ a\ [Ton]\ y\ [g]$

R: $4{,}90\ x\ 10^{-5}\ [Ton]$; $4{,}90\ x\ 10^{1}\ [g]$

$c)\ \mathbf{0,075\ [g]\ a\ [mg]\ \ y\ [\mu g]}$

R: $7{,}5\ x\ 10^{1}\ [mg]\ \ ;\ \ 7{,}5\ x\ 10^{4}\ [\mu g]$

Transformación de unidades de medida de volumen

$a)\ \mathbf{24,0\ [mL]\ a\ [L]\ \ y\ [m^3]}$

$$24{,}0\ [mL] = 24{,}0\ x\ \ [1\ mL] = \ 24{,}0\ x\ \ [10^{-3}L] = \ \ 2{,}40\ x\ 10^{-2}[L]$$

$$24{,}0\ [mL] = 24{,}0\ x\ \ [1\ mL] = \ 24{,}0\ x\ \ [10^{-6}m^3] = \ \ 2{,}40\ x\ 10^{-5}[m^3]$$

NOTA: 1 m³ = 1000 L ; 1 L = 1000 cm³ ; 1 mL = 1 cm³.

$b)\ \mathbf{3,8\ [m^3]\ a\ [L]\ \ y\ [mL]}$

R: $3{,}80\ x\ 10^{3}[L]\ \ ;\ \ 3{,}80\ x\ 10^{6}[mL]$

$c)\ \mathbf{42,5\ [L]\ a\ [mL]\ \ y\ [m^3]}$

R: $4{,}25\ x\ 10^{4}[mL]\ \ \ \ 4{,}25\ x\ 10^{-2}[m^3]$

Transformación de unidades de medida de temperatura

a) 25,0[°C] a [°F] y [K]

$\boxed{t[°F] = t[°C] \times (5/9) + 32}$	$\boxed{T[K] = t[°C] + 273{,}15}$
t[°F] = 25,0 x 1,8 + 32	T[K] = 25,0 + 273,15
t[°F] = 77,0[°F]	T[K] = 298,15[K]

R: t[°F] = 7,70x10[°F] T[K] = 2,98x10^{2}[K]

b) 25,4[°F] a [°C] y [K]

$\boxed{t[°C] = (t[°F] - 32) \times (5/9)}$	$\boxed{T[K] = t[°C] + 273{,}15}$
t[°C] = (25,4 – 32) x (5/9)	T[K] = -3,67 + 273,15
t[°C] = -3,67[°C]	T[K] = 269,48[K]

R: t[°C] = -3,67x10^{0}[°C] T[K] = 2,69x10^{2}[K]

c) 1.623,15[K] a [°C] y [°F]

$\boxed{t[°C] = T[K] - 273{,}15}$	$\boxed{t[°F] = t[°C] \times 1{,}8 + 32}$
t[°C] = 1.623,15 - 273,15	t[°F] = 1350,0 x 1,8 + 32
t[°C] = 1350,0[°C]	t[°F] = 2.462,0[°F]

R: t[°C] = 1,35x10^{3}[°C] t[°F] = 2,46x10^{3}[°F]

Transformación de unidades de medida de presión

a) 54,0[cmHg] a [atm] y [hPa]

1[atm] → 76[cmHg]	1[atm] → 1.013[hPa]
X[atm] → 54,0[cmHg]	0,71[atm] → X[hPa]
X = 0,71[atm]	X = 719,23[hPa]
X = $7{,}1 \times 10^{-1}$[atm]	X = $7{,}19 \times 10^{2}$[hPa]

NOTA: 1 atm = 760 mmHg = 76 cmHg = 101.300 Pa.

b) 0,63[atm] a [mmHg] y [hPa]

R: X = $4{,}79 \times 10^{2}$[mmHg] X = $6{,}38 \times 10^{2}$[hPa]

c) 1070,0[mmHg] a [cmHg] y [atm]

R: X = $1{,}07 \times 10^{2}$[cmHg] X = $1{,}41 \times 10^{0}$[atm]

d) 659,7[hPa] a [cmHg], [mmHg] y [atm]

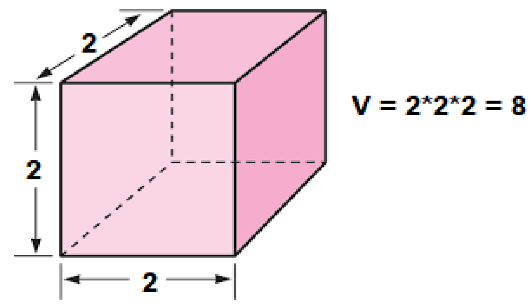
R: X = $4{,}95 \times 10$[cmHg] X = $4{,}95 \times 10^{2}$[mmHg] X = $6{,}5 \times 10^{-1}$[atm]

Problemas con enunciado

1.- Para la siguiente figura geométrica:

La cual posee una masa de **16,0[g]**, calcule:

a) El volumen del cubo
b) la densidad del cubo.



R:

a) V = $[2cm]$ x $[2cm]$ x $[2cm]$ = $[8cm^3]$

b) $d = \frac{m}{V} = \frac{16{,}0\,[g]}{8\,[cm^3]} = 2\left[\frac{g}{cm^3}\right] = 2\left[\frac{g}{mL}\right]$

2.- Una barra de plomo tiene una densidad igual a 11,4[g/mL] y posee una masa de 0,47[kg], ¿qué volumen ocupa la barra de plomo? Indica el resultado en [mL] y en [L].

R:

Datos: d = 11,4[g/mL]

m = 0,47[kg]

V = x

Desarrollo

m = 0,47[kg] $= 4{,}7\ x\ 10^2[g]$

$$d = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{d} = \frac{4{,}7\ x 10^2\ [g]}{11{,}4\left[\frac{g}{mL}\right]} = 4{,}12\ x\ 10^1[mL]$$

$$4{,}12\ x\ 10^1\ [mL] = 4{,}12\ x\ 10^1 x\ [1\ mL] = 4{,}12\ x\ 10^1 x\ [10^{-3}L] = 4{,}12\ x\ 10^{-2}\ [L]$$

3.- Un estanque industrial almacena 5,2 [m³] de producto. ¿A cuántos litros corresponde ese volumen?

R: $5{,}2\ [m^3] = 5{,}2\ x\ [1\ m^3] = 5{,}2\ x\ \left[10^3\ [L]\right] = 5{,}2\ x\ 10^3\ [L]$

4.- Llega un pedido de 1,5 toneladas [Ton] de un cierto aditivo industrial y se le consulta a usted para cuántas dosis de 1[g] alcanza este pedido?

R: $1{,}5\ [Ton] = 1{,}5\ x\ [1\ Ton] = 1{,}5\ x\ [10^6\ g] = 1{,}5\ x\ 10^6\ [g]$

5.- El manual de una máquina de procedencia norteamericana dice que puede ser cargada con un máximo de 200 libras [lb] de producto. ¿A cuántos kg corresponde este peso?

R: $200\ [lb] = 200\ x\ [1\ lb] = 200\ x\ [0{,}453\ kg] = 9{,}06\ x\ 10^1\ kg$

6.- La temperatura de ebullición del agua a una atmósfera de presión es de 100,0(°C). Exprese este valor en la “escala kelvin”.

R: $T(K) = t°C + 273{,}15$; $T(K) = 100{,}0°C + 273{,}15 = 373{,}15[K]$

7.- El germanio funde a 1211,4[K]. ¿A qué temperatura en °C y °F funde este semimetal?

R:

$$T(K) = t°C + 273{,}15$$

$$t(°C) = T(K) - 273{,}15$$

$$t(°C) = 1211{,}4(K) - 273{,}15$$

$$t(°C) = T(K) - 273{,}15 = 938{,}25[°\mathrm{C}]$$

$$t(°F) = t°C\ x\ 1{,}8 + 32$$

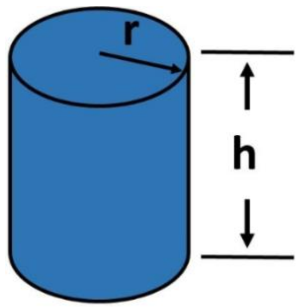
$$t(°F) = 938{,}25°C\ x\ 1{,}8 + 32 = 1720{,}85[°\mathrm{F}]$$

8.- Un anillo de plata cuya densidad "*d*" es 10,50[g/mL] ocupa un volumen "V" de 1,9x10-4[L], ¿cuál es la masa del anillo?

R: $1{,}9\ x\ 10^{-4}\ [L]\ =\ 1{,}9\ x\ 10^{-4} x\ [\ 1\ L]\ =\ 1{,}9\ x\ 10^{-4}\ [\ 10^{3}\ mL]\ =\ 1{,}9\ x\ 10^{-1}\ [mL]$

$$m\ =\ d\ x\ V\quad \rightarrow\quad m\ =\ 10{,}50\left[\frac{g}{mL}\right]\ x\ 1{,}9\ x\ 10^{-1}\ [mL]\ =\ 1{,}995\ \ [g]$$

9.- Determine la masa de un cilindro de cobre cuya densidad es 8,96[g/mL] y tiene las siguientes dimensiones:



R: Diámetro (d) = 1,26cm

Altura (h) = 5,00cm

Volumen (V) = $\pi\ x\ r^{2} x\ h$

$$r\ =\ \frac{d}{2}\ =\ \frac{1{,}26\ cm}{2}\ =\ 0{,}63\ cm$$

$$V\ =\ \pi\ x\ (0{,}63\ cm)^{2} x\ 5{,}00\ cm\ =\ 6{,}23\ cm^{3}\ =6{,}23\ mL$$

$$m = d\ x\ V\ =\ 8{,}96\ \frac{g}{mL}\ \ x\ 6{,}23\ mL\ =\ 5{,}58\ x\ 10^{1}\ [g]$$

10.- Calcula la densidad del cilindro

R: $Diámetro = 1{,}9cm$; $Radio = \frac{d}{2} = 0{,}96cm$

$Altura = 4{,}6cm$

$Volumen =\ \langle V\ =\ \pi\ r^{2} h\rangle$ = 3,14 x (0,95cm)^2 x 4,6cm

$Volumen = 13{,}04cm^{3} = 13{,}04mL$

$Masa = 35{,}1g$

$Densidad = \frac{m}{V} = \frac{35{,}1}{13{,}04} = 2{,}69$ [g/mL]

11.- Un bloque de metal tiene 5[cm] de largo, 3[cm] de alto y 40[mm] de ancho y una masa de 474,8[g]. ¿Cuál es la densidad del bloque metálico?

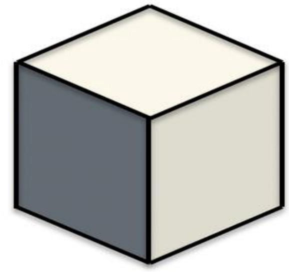
R: $Volumen = largo\ x\ ancho\ x\ altura$

$largo = 5cm$ $Volumen = 60cm^3 = 60mL$

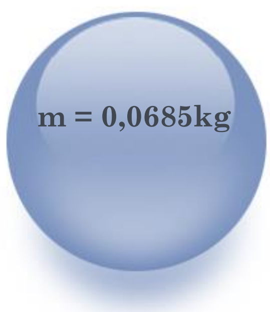
$altura = 3cm$

$ancho = 40mm = 4cm$

$$d = \frac{m}{V} = \frac{474{,}8\,[g]}{60\,[mL]} = 7{,}91[\text{g/mL}]$$



12.- Calcule el volumen de una esfera metálica que tiene una densidad $d = 10{,}50$g/mL



R: $m = 0{,}0685[kg] = 68{,}5[g]$

$$V = \frac{m}{d} = \frac{68{,}5\,[g]}{10{,}50\,\left[\frac{g}{mL}\right]} = 6{,}524\,[mL]$$

13.- Se tienen dos barras de oro cuya densidad es 19,3 $\frac{g}{mL}$ cada una tiene una masa de 0,5kg. ¿Qué volumen (en mL) ocupan las barras?

R: $m = 500[g]x\ 2 = 1000[g]$

$$V = \frac{m}{d} = \frac{1000\,[g]}{19{,}3\,\left[\frac{g}{mL}\right]} = 51{,}81[\text{mL}]$$

PROPORCIONALIDAD.

Resumen de la Unidad

- Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando la razón entre dos cantidades correspondientes es constante.
- Dos magnitudes son inversamente proporcionales si se cumple que el producto entre dos cantidades correspondientes es constante.
- La regla de tres es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas.
- Los porcentajes o tantos por ciento expresan la cantidad de una magnitud que corresponde a 100 unidades de la otra magnitud.

Proporcionalidad Directa

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando la razón entre dos cantidades correspondientes es constante, es decir, se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{a´}{b´} = k$$

Esta constante k, se denomina constante de proporcionalidad directa.

Ejemplo:

Sí un camión circulando a rapidez constante en carretera consume 1 litro de petróleo por cada 6 kilómetros de recorrido. Averigua la relación que existe entre estas dos magnitudes: gasto de petróleo y distancia recorrida.

Para ello, formamos una tabla de dos filas: en una de ellas representamos las cantidades de una magnitud, y en la otra, las cantidades de la otra magnitud.

Distancia	6km	18km	24km	36km	54km
Volumen	1L	3L	4L	6L	9L

Todas las divisiones entre el precio de las manzanas y su peso dan el mismo resultado:

$$\frac{6}{1} = \frac{18}{3} = \cdots = \frac{54}{9} = k = 6\left[\frac{km}{L}\right]$$

Es decir, el gasto de petróleo y la distancia recorrida son magnitudes directamente proporcionales. La constante de proporcionalidad es, en este caso, k = 6 (km/L).

La tabla representada se denomina tabla de proporcionalidad.

Ejemplo:

Considera un automóvil que no circula a velocidad constante, es decir, va frenando y acelerando según el tráfico, de forma que se obtienen los siguientes datos:

Horas transcurridas	1	2	3	4
Kilómetros recorridos	3	7	15	19

Realizamos todas las divisiones entre las dos magnitudes:

$$\frac{3}{1} = 3 \quad ; \quad \frac{7}{2} = 3{,}5 \quad ; \quad \frac{15}{3} = 5 \quad ; \quad \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Podemos observar que estas divisiones no dan el mismo resultado. Por tanto, las magnitudes de las horas transcurridas y los kilómetros recorridos no son directamente proporcionales.

Estudia si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.

a) El lado de un cuadrado y su perímetro.

b) El volumen que ocupa un líquido y su masa.

c) El número de fotocopias y su precio.

R: a) Si (k = 4) b) Si (k = kg/L) c) Si (k = $/unidad)

Regla De Tres Directa

La regla de tres simples directos es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos magnitudes directamente proporcionales.

Ejemplo:

Si una docena de naranjas cuesta $600 pesos, ¿cuánto cuestan 4 naranjas?

Como la cantidad de naranjas y su precio son magnitudes directamente proporcionales, podemos expresar esta relación de la siguiente manera:

12 naranjas	→	$600 pesos
4 naranjas	→	$ X pesos

Escribimos la proporción y realizamos el producto cruzado para despejar la incógnita:

$$\frac{12}{4} = \frac{600}{x} \quad \rightarrow \quad 12\,x = 2400 \;\rightarrow\; x = \frac{2400}{12} = 200$$

Las 4 naranjas cuestan $ 200 pesos.

Ejercicio:

Las ruedas traseras y delanteras de un tractor tienen 1,3 m y 1 m de diámetro, respectivamente. Si las traseras han dado 260 vueltas. ¿Cuántas vueltas han dado las ruedas delanteras?

R: 338 vueltas.

Porcentajes

Los porcentajes o tantos por ciento expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales y nos indican la cantidad de una de ellas correspondiente a 100 unidades de la otra.

Ejemplo:

Si el 20 % de un terreno es 35,5 m², ¿Cuántos metros cuadrados representan el total del terreno?

20 %	→	35,5 m²
100 %	→	X m²

Escribimos la proporción y realizamos el producto cruzado para despejar la incógnita:

$$\frac{17}{100} = \frac{35{,}5}{x} \quad \rightarrow \quad 17\,x = 3550 \ \rightarrow \ x = \frac{3550}{17} = 177{,}5$$

EL total del terreno alcanza los 177,5 m².

Ejercicio:

A Juan Pablo le han puesto una infracción por exceso de velocidad por un monto de 9 UF. Transcurrido el periodo de pago oportuno, se añade un 20% de recargo. ¿Cuánto tendrá que pagar por estar fuera de plazo?

R: 10,8 UF.

Repartos Directamente Proporcionales.

Para realizar el reparto de una cantidad n de forma directamente proporcional a unas cantidades a, b, c…:

- Se suman las cantidades que hay que repartir: a + b + c + ...
- Se divide la cantidad n entre esa suma. Este cociente es la constante de proporcionalidad.
- Para calcular cada parte basta con multiplicar cada cantidad a, b, c… por esa constante.

Ejemplo:

La regionalización de un país ha concebido una subvención de 1.500 millones de pesos para tres ciudades sureñas. La ciudad A tiene 1,8 millones de habitantes, la ciudad B tiene 700 mil y la ciudad C 500 mil. ¿Cómo debe repartirse el dinero?, si debe distribuirse en forma directamente proporcional al número de habitantes.

	Total	A	B	C	
Habitantes:	3.000	1.800	700	500	(miles)
Pesos:	1.500	x	y	z	(millones)

Escribimos la proporción y realizamos el producto cruzado para despejar cada incógnita:

$$\frac{3000}{1500} = \frac{1800}{x} \rightarrow \quad 3000\,x = 2700000 \rightarrow \; x = \frac{2700000}{3000} = 900\,millones$$

$$\frac{3000}{1500} = \frac{700}{y} \rightarrow \quad 3000\,y = 1050000 \rightarrow \; y = \frac{1050000}{3000} = 350\,millones$$

$$\frac{3000}{1500} = \frac{500}{z} \rightarrow \quad 3000\,z = 750000 \rightarrow \; z = \frac{750000}{3000} = 250\,millones$$

Proporcionalidad Inversa.

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el producto entre dos cantidades correspondientes es constante, es decir, se cumple:

$$a \cdot b = a' \cdot b' = k$$

Esta constante k se denomina constante de proporcionalidad inversa.

Ejemplo:

Tres obreros tardan 12 horas en pintar una pared de 90 m². Si fuesen 2 obreros tardarían 18 horas y si fuesen 15 obreros demorarían 2,4 horas en pintar la misma superficie. ¿Qué relación hay entre estas magnitudes?

Obreros	3	2	15
Horas	12	18	2,4

Todos los productos el número de obreros y el número de horas dan el mismo resultado:

$$3 \cdot 12 = 2 \cdot 18 = 15 \cdot 2{,}4 = k = 36 \text{ [hombres} \cdot \text{horas]}$$

Por lo tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales.

Ejemplo:

Tardamos 3 horas en hacer el recorrido que hay de casa al colegio a una velocidad de 12 km/h. Si fuésemos a 6 km/h tardaríamos 6 horas, y si fuésemos a 4 km/h, 9 horas. Comprueba si estas magnitudes son inversamente proporcionales.

R: Si son inversamente proporcionales, k = 36 [km].

Regla De Tres Inversa

La regla de tres simples inversos es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo:

Si 4 trabajadores tardan 10 días en hacer un trabajo, ¿cuánto tardarán 3 trabajadores?

Expresar esta relación de la siguiente manera:

4 trabajadores	→	10 días
3 trabajadores	→	X días

Escribimos la proporción y realizamos el producto para despejar la incógnita:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{10}{x} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{10}{x} \rightarrow \quad 3 \cdot x = 4 \cdot 10 \rightarrow x = \frac{40}{3} = 13{,}3$$

Las 3 trabajadores tardarían 13,3,días.

Ejercicio:

Un grifo que vierte 18 L/min tarda 28 horas apara llenar un depósito. Si su caudal fuera de 42 L/min, averigua el tiempo que tardaría en llenarlo.

c) El número de fotocopias y su precio.

R: 12 horas.

Repartos Inversamente Proporcionales.

Para realizar el reparto de una cantidad n de forma inversamente proporcional a otras cantidades a, b, c…

• Se suman las cantidades que hay que repartir de forma inversa: 1/a + 1/b + 1/c + ...

• Se divide la cantidad n entre esa suma. Este cociente es la constante de proporcionalidad inversa.

• Para calcular cada parte basta con dividir la constante anterior por cada cantidad a, b, c…

Ejemplo:

El premio de una carrera es de $ 5 millones y se repartirá entre los tres primeros corredores en terminar la prueba de forma inversamente proporcional al orden de llegada (1, 2 y 3). ¿Qué cantidad le corresponde a cada corredor?

Lugar:	1	2	3	
Premio:	x	y	z	→ $ 5.500.000 pesos

Suma Inversa: 1/1 + 1/2 + 1/3 = 11/6 → Cte. Inv. Prop. = $\frac{5500000}{\frac{11}{6}} = 3.000.000$

Determinamos las incógnitas de la siguiente manera:

$$1er.\, lugar = \frac{3000000}{1} = 3\, millones$$

$$2do.\, lugar = \frac{3000000}{2} = 1{,}5\ \ millones$$

$$3er.\, lugar = \frac{3000000}{3} = 1\, millones$$

Ejercicios Propuestos

1.- ¿Cuáles de las siguientes tablas de datos corresponden a magnitudes inversamente o directamente proporcionales?

x	3	9	6	30
y	5	15	10	50

a)

x	2	5	3	10
y	4	10	6	20

b)

x	2	4	7	14
y	14	7	4	2

c)

x	3	9	15	6
y	4	16	20	8

d)

R: a) Directa b) Directa c) Inversa d) Ninguna

2.- Estudia si la relación que existe entre estos pares de magnitudes es de proporcionalidad, en caso de que lo sea, indica si es directa o inversa.

a) Velocidad y tiempo en un movimiento rectilíneo uniforme.
b) Distancia y tiempo en un movimiento a rapidez constante.
c) Número de horas que un estudiante mira el celular y número de horas de estudio.
d) Número de albañiles y el tiempo que tarden en construir una pared.
e) Relación entre la masa y el volumen de un líquido.

R: a) Inversa b) Directa c) Ninguna d) Inversa e) Directa

3.- Completa las siguientes tablas, sabiendo que A y B representan magnitudes inversamente proporcionales. Halla la constante de proporcionalidad en cada caso.

A	6	5	30	
B	90			54

a)

A	2	6	15	4
B				75

b)

R: a) 108, 18 y 10 respectivamente. Constante 540.

b) 150, 50 y 20 respectivamente. Constante 300.

4.- Completa la siguiente tabla para que corresponda a valores de dos magnitudes directamente proporcionales. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este caso?

1	2	3	4			7
10	20			50	60	

R: a) 30, 40, 5, 6 y 70 respectivamente. Constante 10.

5.- Una máquina produce 800 tornillos en 5 horas. ¿ Cuanto tiempo tardara la máquina en fabricar 1000 tronillos?

R: 6 horas y 15 minutos.

6.- Un coche recorre un trayecto a 90 km/h en 8 horas. ¿A que velocidad iría si tardase 9 horas?

R: 80 km/h.

7.- Un agricultor tiene fardos de pasto seco para alimentar a 20 vacas durante 60 días. Si compra 10 vacas más, ¿para cuantos días tendrá alimento?

R: 40 días

8.- Una familia numerosa consume 2,5 litros de leche al día. ¿Cuántos litros de leche bebe a la semana?

R: 17,5 litros

9.- Calcula:

a) 7% de 420
b) 15% de 4000
b) 90% de 1900
d) 65% de 40

R: a) 29,4 b) 600 c) 1710 d) 26

10.- Determina el valor de x, sabiendo que:

a) 30% de x es 20
b) 4,5% de x es 152
c) 67% de x es 725

R: a) 66,7 b) 3377,8 c) 1082,1

11.- Arturo paga de impuestos un 22% de su salario. Si este año sus ingresos ascienden a los $ 255.00 pesos. ¿Cuánto tendrá que pagar de impuestos? ¿Qué cantidad neta (total–impuestos) ha recibido?

R: $ 5.610 pesos. $ 198.900 pesos.

12.- A una vasija con 4 L de vino se le añade 400 mL de agua. Averigua la razón entre vino y agua. ¿Qué porcentaje del total de la mezcla es agua?

R: La razón es 4000 / 400 = 10, es decir, por cada 10 L de vino hay 1 L de gua. El 9,1 % de la mezcla es agua.

13.- La razón entre las probabilidades de ganar de 2 equipos A y B de fútbol es 5/3. ¿Qué significa esta razón? ¡podrías calcular, en porcentaje, las posibilidades de victoria de A? ¿Y las de B?

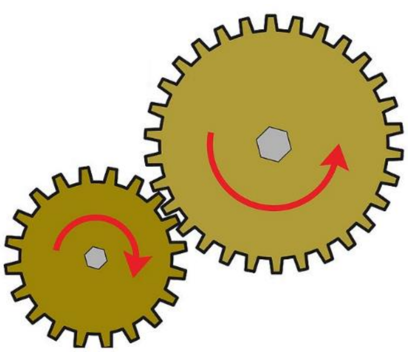
R: La razón significa que por cada 8 partidos, A gana 5 y B gana 3.

La posibilidad de A de ganar es 62,5% y de B es 37,5%.

14.- Para hacer 2 bufandas se utilizan 45 m de lana. ¿Cuánta lana se necesita para hacer 3 bufandas? ¿Y para hacer 7 bufandas? Y ¿Cuántas bufandas se pueden hacer con 150 metros de lana?

R: 67,5 m - 157,5 m - 6 bufandas

15.- En el mecanismo de un motor, un engranaje tiene dos ruedas, de 36 y 24 dientes, respectivamente. Si la rueda mayor da 6 vueltas, ¿cuántas vueltas de la rueda menor radio?



R: 9 vueltas.

16.- Una llave tarda 36 horas en llenar un pilón de dos mil quinientos litros de capacidad y otra llave B tarda 24 horas. Si abrimos las 2 llaves a la vez, ¿Cuánto tardarán en llenar el lagar?

R: 14 horas y 24 minutos.

17.- Se decide construir un tranvía cuyo costo parcial de 1.000 millones de pesos, han de pagarlo 3 ciudades en partes inversamente proporcional a distancia respecto a la estación base. Se sabe que, Base-Aihue está a 12 km, Base-Llanque está a 16 km y Base-Nahuel está a 20 km. Determina cuanto a de pagar cada ciudad.

R: 425,5 millones de pesos pagará Aihue.

\- 319,2 millones de pesos pagará Llanque.

255,3 millones de pesos pagará Nahuel.

18.- Pamela y Cristián abren una cuenta de ahorro en el banco “Todos Ganan”. Pamela deposita $400.000 pesos y Cristián $800.000 pesos. Al cabo de unos años les devuelven $1.380.000 pesos. ¿Qué tipo de proporción deben utilizar para repartir el dinero? ¡Cuánto le corresponde a cada uno?

R: Proporcionalidad directa. 460 mil a Pamela y 920 mil a Cristián.

19.- Un papá decide repartir 120 bombones de chocolates entre sus cuatros nietos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 8, 12, 12 y16 años respectivamente. ¿Cuántos bombones debe recibir cada uno de ellos?

R: 20, 30, 30 y 40 bombones respectivamente.

20.- Dos artefactos eléctricos funcionado 6 horas diaria y consumen 1.500 kWh en un día. ¿Cuánto consumirán 3 artefactos funcionado 8 horas diarias?

R: 3000 kWh.

21.- Cien personas, trabajando 8 horas al día, tardan 300 días en construir una carretera.

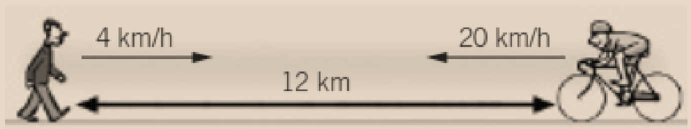
a) Si aumentan el grupo de trabajo en 20 personas, ¿Cuántos días se adelantaría la construcción?
b) Si el grupo se reduce en 20 personas y los turnos se aumenta a 9 horas diarias, ¿cuántos días toma la ejecución de la obra?

R: a) 250 días b) 333,3 días

Una aplicación de las proporciones en la cinemática.

Un caminante y un ciclista marchan por la misma vía. El caminante lleva una velocidad de 4 km/h, y el ciclista, de 20 km/h.

a) Si parten al mismo tiempo, desde puntos opuestos que distan entre sí 12 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?



b) Si parten del mismo punto y el caminante lleva una ventaja de 4 km, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzarlo el ciclista?

PRIMERO. Se suman o restan las velocidades, según vayan en distinta o en igual dirección.

a) VELOCIDAD DE ENCUENTRO $= 20 + 4 = 24$ km/h

b) VELOCIDAD DE ALCANCE $= 20 - 4 = 16$ km/h

SEGUNDO. La razón entre la distancia que los separa y la velocidad a la que se aproximan es el tiempo, *t*.

a) $t = \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \dfrac{12}{24} = 0{,}5$ h en encontrarse

b) $t = \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \dfrac{4}{16} = 0{,}25$ h en alcanzarlo

Fuente: Santillana editores, S.A.

ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO.

Resumen de la Unidad

- Una ecuación es una igualdad algebraica que sólo es cierta para algunos valores.
- La incógnita de una ecuación es la letra (x) de valor desconocido.
- El grado de una ecuación es el mayor exponente de la incógnita.
- La solución o soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que hacer cierta la igualdad.
- Ecuación de primer grado: $ax + b = 0$
- Ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números conocidos y $a \neq 0$.

Distinguir e identificar ecuaciones e identidades

Identidades y Ecuaciones

Una **igualdad algebraica** está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual (=).

- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor de las letras.
- Una **ecuación** es una igualdad algebraica que no se cumple para todos los valores de las letras.

Ejemplo:

- $\mathbf{3x + x = 4x}$ es una identidad.

Se cumple la igualdad para cualquier valor numérico que tome x:

Para $x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 + 1 = 4 \cdot 1 \rightarrow 4 = 4$

Para $x = -2 \rightarrow 3 \cdot (-2) + (-2) = 4 \cdot -2 \rightarrow -8 = -8$

- $\mathbf{x} + 6 = \mathbf{10}$ es una ecuación.

Sólo se cumple cuando $x = 4 \rightarrow 4 + 6 = 10$.

NOTA

- Si a los dos miembros de una ecuación se les **suma o resta un mismo número** o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente.
- Si a los dos miembros de una ecuación se les **multiplica o divide por un mismo número distinto de cero**, se obtiene otra ecuación equivalente.

ECUACION DE PRIMER GRADO O LINEAL

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TIPOS.

Resuelve la ecuación: $x - 2 = 5$

Sumamos 2 en ambos miembros $\rightarrow x - 2 + 2 = 5 + 2$

$\rightarrow x = 7$

Resuelve la ecuación: $x + 2x = 4 + 2x + 5$.

Restamos 2x en ambos miembros $\rightarrow x + 2x - 2x = 4 + 2x - 2x + 5$

$\rightarrow x = 4 + 5$

$\rightarrow x = 9$

Resuelve la ecuación $\frac{7x}{4} = 14$.

Multiplicamos por 4 ambos miembros $\rightarrow \frac{7x}{4} \cdot 4 = 14 \cdot 4$

Desarrollando los factores $\rightarrow 7x = 56$

Dividimos ambos miembros entre 7 $\rightarrow x = 56/7$

$\rightarrow x = 8$

Resuelve la ecuación 2(x – 4) – (6 + x) = 3x – 4.

Para resolver una ecuación es conveniente seguir estos pasos:

1. Eliminamos paréntesis → 2x – 8 – 6 – x = 3x – 4
2. Agrupamos términos.
   - Agrupamos los términos con x en el segundo miembro. → – 8 – 6 = 3x – 4 – 2x + x
   - Agrupamos los términos numéricos en el primer miembro. → – 8 – 6 + 4 = 3x – 2x + x
3. Reducimos términos semejantes. → – 10 = 2x /: -2
4. Despejamos x → – 5 = x
5. Presentamos la solución. → x = – 5

Resuelve la ecuación $\frac{2x-1}{3} = \frac{x-3}{2} + \frac{3x-7}{4}$

Para resolver una ecuación con denominadores es conveniente seguir estos pasos:

1. Eliminamos denominadores. m.c.m.* (3, 2, 4) = 12

   $\rightarrow 12 \cdot \frac{2x-1}{3} = 12 \cdot \frac{x-3}{2} + 12 \cdot \frac{3x-7}{4}$

   → 4(2x – 1) = 6(x – 3) + 3(3x – 7)
2. Eliminamos paréntesis. → 8x – 4 = 6x – 18 + 9x – 21
3. Agrupamos términos. → – 4 + 18 + 21 = 6x + 9x – 8x
4. Reducimos términos semejantes. → 35 = 7x
5. Dividimos por 7 $\rightarrow \frac{35}{7} = \frac{7x}{7}$
6. Reducimos las fracciones → 5 = x
7. Presentamos la solución → x = 5

* *m.c.m. : mínimo común múltiplo.*

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICA

Una **ecuación de segundo grado** es una igualdad algebraica del tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, donde:

- a, b y c son los **coeficientes** de la ecuación. Si a = 0, entonces la ecuación no es de segundo grado, es de primer grado.
- $ax^2 \rightarrow$ **término cuadrático** $bx \rightarrow$ **término lineal** $c \rightarrow$ **término independiente**
- x es la **incógnita.**

FÓRMULA GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado puede tener dos, una o ninguna solución.

Para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado se aplica la siguiente fórmula.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Identificamos los coeficientes de la ecuación: a = 1, b = 5 y c = 6

Reemplazamos en la formulación:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Sustituyendo los valores –2 y –3 en la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, se comprueba que la cumplen:

$$(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0 \rightarrow 4 - 10 + 6 = 0 \rightarrow 10 - 10 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$(-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6 = 0 \rightarrow 9 - 15 + 6 = 0 \rightarrow 15 - 15 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

Las ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ se consideran ecuaciones de segundo grado.

Son ecuaciones del tipo ax2 + bx + c = 0, donde b = 0.

Para resolverlas se sigue este proceso:

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + c = 0} \rightarrow ax^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}}$$

- Si el **radicando** es **positivo**, hay dos soluciones opuestas: $x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$
- Si el **radicando** es **negativo**, no hay solución.

Ejemplo:

$\mathbf{2x^2 - 32 = 0} \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

$\mathbf{3x^2 + 75 = 0} \rightarrow 3x^2 = -75 \rightarrow x^2 = \frac{-75}{3} \rightarrow x^2 = -25 \rightarrow x = \pm\sqrt{-25} \rightarrow$ No tiene solución en R.

Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$

Las ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ se consideran ecuaciones de segundo grado.

Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde c = 0.

Para resolverlas se sigue este proceso:

$$\boxed{ax^2 + bx = 0 \xrightarrow{\textit{Factor común } x} x(ax + b) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}}$$

Ejemplo:

$\mathbf{x^2 - 12x = 0} \rightarrow x(x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 12 = 0 \rightarrow x_2 = 12 \end{cases}$

$\mathbf{2x^2 - 5x = 0} \rightarrow x(2x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x_2 = \frac{-5}{2} \end{cases}$

***** Estas ecuaciones tienen siempre dos soluciones, siendo cero una de ellas.**

NOTA

Al término ⌂ = $b^2 - 4ac$, se le denomina discriminante de la ecuación y en base al valor que asume tras el reemplazo de los coeficientes (a, b y c) define el tipo de solución que posee la ecuación cuadrática:

- Si ⌂ > 0, entonces la ecuación cuadrática posee 2 soluciones reales distintas.
- Si ⌂ = 0, entonces la ecuación cuadrática posee 1 solución real repetida.
- Si ⌂ < 0, entonces la ecuación cuadrática no posee soluciones reales (son complejas conjugadas).

Resolver problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado

Resolución de problemas

Para resolver un problema utilizando ecuaciones de primer grado es conveniente seguir estos pasos:

1. Identificamos la incógnita. Es necesario distinguir los datos conocidos y el dato desconocido, es decir, la incógnita.
2. Planteamos la ecuación. Hay que expresar las condiciones del enunciado en forma de ecuación: la correspondencia entre los datos y la incógnita.

3. Resolvemos del a ecuación. Se obtiene el valor de la incógnita resolviendo la ecuación.
4. **4.** Comprobamos e interpretamos la solución. Se debe comprobar si la solución verifica el enunciado e interpretar la solución en el contexto del problema.

Ejemplo:

Andrés tiene $2 más que Benito, Benito tiene $2 más que Edison y Edison tiene $2 más que Luis. Entre los cuatro amigos tienen $48 (pesos). Calcula la cantidad de dinero que tiene cada uno de los amigos.

1.- Identificamos la incógnita.

Tomamos como dato desconocido el dinero que tiene Luis.

2.- Planteamos la ecuación en base al dinero que posee Luis → x

Las restantes cantidades de dinero las escribimos en función de x:

Dinero de Edison → $2 más que Luis → x + 2
Dinero de Benito → $2 más que Edison → (x + 2) + 2 = x + 4
Dinero de Andrés → $2 más que Benito → (x + 4) + 2 = x + 6

3.- Escribimos la condición de que la suma de las cantidades es $48.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48$$

4.- Resolvemos la ecuación anterior.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48 \rightarrow 4x + 12 = 48 \rightarrow 4x = 48 - 12$$
$$\rightarrow 4x = 36$$
$$\rightarrow x = \frac{36}{4} = 9$$

→ Luis tiene $9

Edison tiene:	9 + 2 = $11
Benito tiene:	9 + 4 = $13
Andrés tiene:	9 + 6 = $15

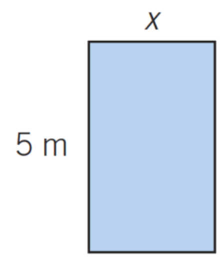
5.- Comprobamos e interpretamos la solución.

Las cantidades que tienen los amigos: 9, 11, 13 y 15pesos, que cumplen las condiciones del enunciado.

$9 + $11 + $13 + $15 = $48

Ejemplo:

En un rectángulo de base x y altura 5 m sabemos que su perímetro es 16 m. Calcula la longitud de la base.



1. Calcular el perímetro de un rectángulo, equivale a sumar todos sus lados.
2. Planteamos la ecuación: → 2x + 10 =16
3. Despejando la incógnita: → 2x = 6

   → x = 3

4. La base mide 3 m.
5. Comprobamos el resultado: → 3 + 5 + 3 + 5 =16 m.

Ejemplo:

En una clase de 33 alumnos hay doble número de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay?

1. Se el número de chicos igual a x
2. El número de chicas es 2x
3. Planteamos la ecuación: → x + 2x = 33
4. Despejando la incógnita: → 3x = 33

   → x = 11

5. El número de chicos es de 11 y el de chicas es 22.
6. Comprobamos el resultado: 11 + 2*11 = 33.

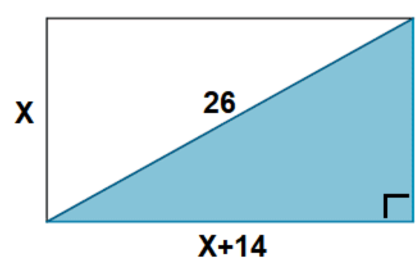
Ejemplo:

"El cuadrado de la mitad de un número positivo, más cinco unidades es igual a 9. Hallar dicho número."

1. Se el número buscado igual a x
2. El cuadrado de la mitad de un número es $\rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2$
3. Planteamos la ecuación: $\rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 5 = 9$
4. Multiplicamos por 4: $\rightarrow 4\left(\frac{x^2}{4}\right) + 4 \cdot 5 = 4 \cdot 9$
5. Despejando la incógnita: $\rightarrow x^2 + 20 = 36$
   $\rightarrow x^2 = 16$
   $\rightarrow x = 4\,, -4$
6. El número que buscamos es 4.
7. Comprobamos el resultado: $\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5 = 4 + 5 = 9$.

Ejemplo:

Queremos hacer el marco de un portarretratos rectangular, de modo que el largo sea 14 cm mayor que el ancho y que la diagonal del marco mida 26 cm. ¿Qué dimensiones debe tener el marco rectangular?



1. Se el ancho del cuadro igual a x
2. El largo del marco es entonces: $\rightarrow x + 14$
3. Planteamos la ecuación (T. Pitágoras): $\rightarrow (x)^2 + (x + 14)^2 = (26)^2$
4. Desarrollando los paréntesis: $\rightarrow x^2 + x^2 + 28x + 196 = 676$
5. Reduciendo los términos semejantes: $\rightarrow 2\,x^2 + 28x - 480 = 0$

6. Dividimos por 2: $\rightarrow\ x^2 + 14x - 240 = 0$
7. Despejando la incógnita de la ec. cuadrática: $\rightarrow\ x = \frac{-14 \pm \sqrt{196+960}}{2}$
8. Encontramos las soluciones: $\rightarrow\ x = 10\ y - 24$ (sólo 10 es factible)
9. Las medidas del portarretratos son: 10 cm de ancho y 24 cm de largo.

Ejercicios propuestos:

1.- Determina el grado de las siguientes ecuaciones.

a) $x + 3 = 10$

b) $4x - x = x + 8$

c) $x(x - 2) = 3 - 4(x + 2)$

d) $x - x^2 + 3 = 8 + x(5 - x)$

e) $x^2 (x - 3) + 5x^2 = x(1 + x^2)$

R: a) Grado 1 b) Grado 1 c) Grado 2 d) Grado 1 d) Grado 2

2.- Resuelve estas ecuaciones.

a) $2x + 4 = 16$

b) $7x + 8 = 57$

c) $x + 2 = 16 - 6x$

d) $x - 1 = 9 - x$

e) $5x - 5 = 25$

f) $3x + 4 = 2(x + 4)$

g) $5(x - 1) - 6x = 3x - 9$

h) $4(x - 2) + 1 + 3x = 5(x + 1)$

R: a) $x = 6$ b) $x = 7$ c) $x = 2$ d) $x = 5$

a) $x = 6$ b) $x = 4$ c) $x = 1$ d) $x = 6$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores.

a) $\frac{x+3}{4} = \frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{5}$

b) $\frac{x+6}{40} - \frac{1}{4} = \frac{x-4}{3}$

c) $-(x+4) + \frac{x}{3} = -\frac{8x}{3}$

R: a) x = -11/9 b) x = 148/37 c) x = 2

3.- Despeja x en la ecuación: $\frac{a(x-3)}{12} = \frac{a(8-x)}{3}$

R: x = 7.

4.- El perímetro de un rectángulo es de 400 m. Halla la longitud de sus lados, sabiendo que la base es 2 m mayor que la altura.

R: Altura = 99m y Base = 101 m.

5.- En un zoológico hay el doble número de chimpancés que de gorilas. Si en total son 171 animales, ¿cuántos habrá de cada especie?

R: Hay 57 gorilas y 114 chimpancés.

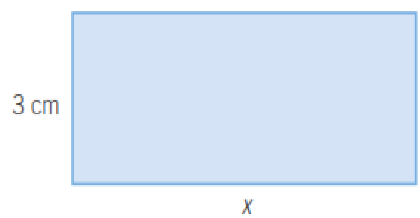
6.- La suma de dos números consecutivos impares es 156. ¿Qué números son?

R: Los números son 77 y 79.

7.- Por cada día de retraso en el pago de una multa de tráfico se aumenta su coste en 3 €. Juan tiene una multa por aparcar en doble fila. ¿Cuántos días se ha retrasado en pagar si ha abonado 156 € en vez de 105 €?

R: 17 días de retraso.

8.- Halla la base x de un rectángulo de altura 3 cm y perímetro 22 cm.



R: $x = 8$ cm.

9.- Escribe la expresión general de estas ecuaciones de segundo grado, y determina sus coeficientes.

a) $(x - 1)(x + 4) = 1$

b) $x^2 - 5x + 2 = -x^2$

c) $3x^2 - 5 = -2x^2 + x - 4$

d) $3x^2 - 5x = 0$

e) $-x^2 - x - 1 = 0$

f) $(x - 2)\,3x = 4$

R:

a) $x^2 + 3x - 5 = 0$; $a = 1,\ b=3,\ c = -5$

b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $a = 2,\ b=-5,\ c = 2$

c) $5x^2 - x - 1 = 0$; $a = 5,\ b=-1,\ c = -1$

d) $3x^2 - 5x = 0$; $a = 3,\ b=-5,\ c = 0$

e) $-x^2 - x - 1 = 0$; $a = -1,\ b=-1,\ c = -1$

f) $3x^2 - 6x - 4 = 0$; $a = 3,\ b=-6,\ c = -4$

10.- Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 + 16 = 0$

c) $5x^2 - 320 = 0$

d) $x^2 - 2x = 0$

e) $x(x - 4) = 0$

R:

a) $x_1 = 6$, $x_2 = -6$

b) No hay solución real (raíz negativa)

c) $x_1 = 8$, $x_2 = -8$

d) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

e) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

11.- Escribe una ecuación cuyas soluciones sean:

a) $x_1 = 5,\ x_2 = -5$

b) $x_1 = 0,\ x_2 = -2$

R: a) $x^2 - 25 = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$

12.- Calcula la solución de estas ecuaciones.

a) $(x - 2)(x + 1) = 0$ b) $x^2 + 2x = 15$

R: a) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

b) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$

13.- En la ecuación x2 + 3x + c = 0, obtén el valor de c sabiendo que sus soluciones son –1 y –2.

R: $c = 2$

14.- Indica si estas igualdades algebraicas son ciertas para $x = 2$.

a) $5x^2 - 3x + 7 = 21$

b) $(x + 1)(x - 2) = 0$

c) $\frac{4x-3}{2} = \frac{1}{2}$

R: a) Verdadero

b) Verdadero

c) Falso

15.- ¿Cuál de los siguientes valores hace cierta la igualdad $\frac{x+3}{2} = \frac{x}{2} - 1$?

a) x = –1 b) x = 2 c) x = –10 d) x = 12

R: c) x = –10

16.- Asigna una ecuación a cada enunciado.

a) El cuadrado de un número es 100.

b) El cubo de un número es 125.

c) La suma del cuadrado de un número más 2 es 82.

d) La diferencia del cubo de un número menos 3 es 124.

e) La mitad del cuadrado de un número es 8.

f) La quinta parte del cubo de un número es 310.

R:

a) $x^2 = 100$

b) $x^3 = 125$

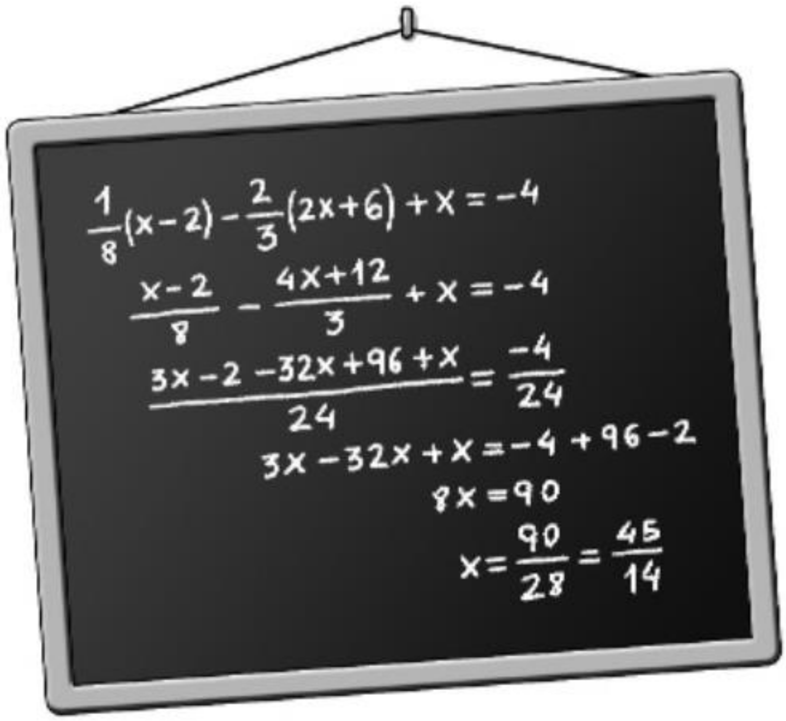
c) $x^2 + 2 = 82$

d) $x^3 - 3 = 124$

e) $x^2 /2 = 8$

f) $x^3 /5 = 310$

17.- Corrige los errores cometidos en la resolución de la ecuación.



R:

$$\frac{1}{8}(x-2)-\frac{2}{3}(2x+6)+x=-4$$
$$\frac{x-2}{8}-\frac{4x+12}{3}+x=-4$$
$$\frac{3x-6-32x-96+24x}{24}=\frac{-96}{24}$$
$$3x-32x+24x=-96+96+6$$
$$5x=-6$$
$$x=-\frac{6}{5}$$

18.- Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x(x-3)=0$

b) $(x-5)(3x+9)=0$

c) $(7x+1)(4x-3)+3=3$

d) $(x+4)(x-5)=-14$

e) $(5x+3)\left(x-\frac{1}{5}\right)+2=3$

f) $(x+3)(x+3)=0$

g) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

R:

a) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

b) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$

c) $x_1 = -1/7$, $x_2 = 3/4$

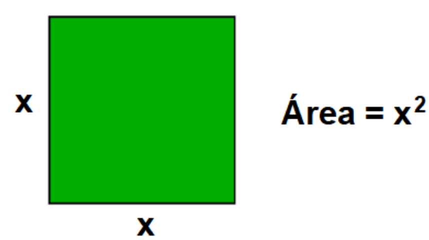
d) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$

e) $x_1 = -4/5$, $x_2 = 2/5$

f) $x_1 = -3$, $x_2 = -3$

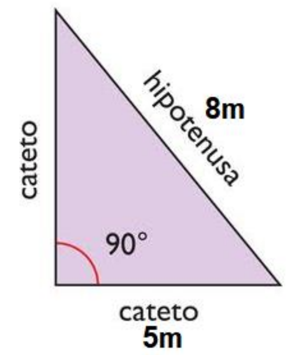
g) $x_1 = \sqrt{(1/2)}$, $x_2 = -\sqrt{(1/2)}$

19.- Halla la longitud del lado de una parcela cuadrada si su área, más cinco veces su lado, menos 18, es igual a 482.



R: El lado mide 20 m.

20.- Determina la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, si su hipotenusa mide 8m y el cateto 5m.

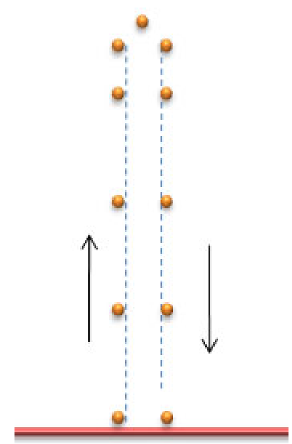


R: El lado mide 6,24 m.

20.- La diferencia entre un número entero (Z) y su reciproco es veinticuatro quintos (24/5). ¿Cuál es el número?

R: El número es 5.

21.- Se lanza verticalmente hacia arriba una piedra desde el piso de una cancha de fútbol. Si la ecuación de posición de este movimiento, está dada por $X = 20\,t - 5\,t^2$, ¿Qué tiempos se tienen cuando la piedra alcanza la posición de 15 metros de altura?



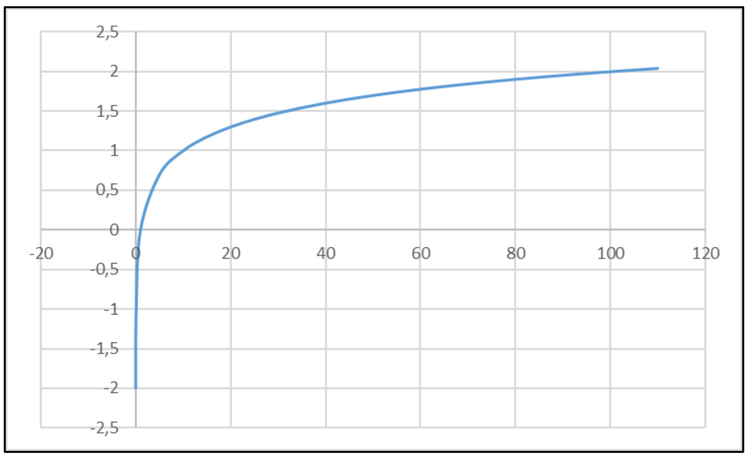
R: Los tiempos son: 1 s y 3s.

LOGARITMOS

LOGARITMO DECIMAL

En matemática se denomina **logaritmo decimal** o **logaritmo común** al logaritmo cuya base es 10, por lo tanto, es el exponente al cual hay que elevar 10 para obtener dicho número. Se suele denotar como $\mathbf{log_{10}(x)}$, o a veces como $\mathbf{log(x)}$, aunque esta última notación causa ambigüedades, ya que los matemáticos usan ese término para referirse al logaritmo complejo. El logaritmo decimal fue desarrollado por Henry Briggs, matemático británico del siglo XVII.

$$log_{10}x \quad \leftrightarrow \quad \log x$$



Representación geométrica del logaritmo decimal o común en coordenadas cartesianas. Su dominio (valores de x) son siempre los reales positivos.

Definición histórico - algebraica

Sean

$$A: 0,\ 1,\ 2{,}3, \ldots.$$

progresión aritmética de razón 1

$$G: 1,\ 10,\ 100,\ 1000, \ldots$$

progresión geométrica de razón 10 de modo que hay una correspondencia 1:1 entre estas dos sucesiones, definida por

$$y = 10^x \; ;$$

Además, tomando como *exponente* de 10 un elemento de la primera sucesión A, se obtiene su potencia que figura en la sucesión geométrica G.

Luego se plantea la ecuación

$$2 = 10^x$$

para resolverla se plantea el concepto de logaritmo.

$$log_{10}2 = \; x \leftrightarrow 2 \; = \; 10^x$$

se lee *x es el logaritmo de 2 de base 10*. También se llama a **x** logaritmo decimal de 2. Reemplazando a 2 por cualquier real positivo $\boldsymbol{a}$ se define el logaritmo decimal de tal número.

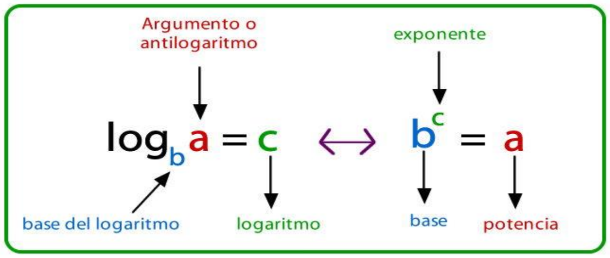
Propiedades y características

$$\log{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})} = \log \boldsymbol{a} + \log \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{log}\, \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \log \boldsymbol{a} - \log \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{log}\, \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} \cdot \log \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{log}\, \sqrt[\boldsymbol{b}]{\boldsymbol{a}} = \frac{\log \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$



Observando la siguiente progresión geométrica

$$10^0 = 1 \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0.1$$

$$10^1 = 10 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$$

$$10^2 = 100 \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001$$

$$10^3 = 1000 \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001 \ \ldots \ \text{etc.}$$

Se puede deducir fácilmente las siguientes propiedades de los logaritmos de base 10:

Los únicos números de este sistema cuyos logaritmos son enteros son las *potencias de diez.* Así:

$$log_{10}\ 1 = 0 \qquad log_{10}\ 0.1 = -1$$

$$log_{10}\ 10 = 1 \qquad log_{10}\ 0.01 = -2$$

$$log_{10}\ 100 = 2 \qquad log_{10}\ 0.001 = -3$$

$$log_{10}\ 1000 = 3 \qquad log_{10}\ 0.0001 = -4$$

$$log_{10}\ 10000 = 4 \qquad log_{10}\ 0.00001 = -5$$

$$log_{10}\ 100000 = 5 \qquad log_{10}\ 0.000001 = -6$$

$$log_{10}\ 1000000 = 6 \qquad log_{10}\ 0.0000001 = -4 \qquad \ldots\ \text{etc}$$

Ejemplo:

Determina el $\boldsymbol{log_3}$ 243.

$$log_3 243 \;=\; log_3 (3^{\,5}\,)$$

$$= 5 \cdot \; log_3 3$$

$$= 5 \cdot 1$$

$$= 5$$

Ejemplo:

Determina el $\boldsymbol{ln\, e^5}$.

$$\ln e^4 \;=\; 4 \cdot \ln e \;=\; 4\; log_e\; e$$

$$= 4 \cdot 1$$

$$= 4$$

Ejemplo:

Calcula el $\boldsymbol{log_2 24}$, si sabemos que $\boldsymbol{log_2\; 3\; = 1{,}585}$.

Primero: Se descompone el número en factores primos.

$$24 = 2^3 \;\cdot 3$$

Segundo: Se aplican las propiedades del logaritmo de un producto y potencia.

$$log_2 24 \;= log_2 (2^{\,3} \cdot \; 3)$$

$$= \; log_2 2^{\,3} + \; log_2 3$$

$$= 3 + log_2 3 \;= 3 + 1{,}585$$

$$= 4{,}585$$

Ejercicios propuestos:

1.- Calcula mediante la definición, los siguientes logaritmos.

a) $log_9\ 81$

b) $log\ 1.000.000$

c) $log\ 0{,}00001$

d) $\ln e^{-14}$

e) $log_7\ 343$

f) $log_4\ 0{,}0625$

$\ln x = log_e x$
$log_a a^b = b$
$log_{10} x = log\ x$
$log\ 10^n = n$

R: a) $log_9\ 81 = log_9\ 9^2 = 2$

b) $log\ 1.000.000 = \log 10^6 = 6$

c) $log\ 0{,}00001 = \log 10^{-5} = -5$

d) $\ln e^{-14} = -14$

e) $log_7\ 343 = log_7\ 7^3 = 3$

f) $log_4\ 0{,}0625 = log_4 4^{-2} = -2$

2.- Halla el resultado de estas expresiones, utilizando las propiedades de los logaritmos.

$a)\ 2\ log_4 16 +\ log_2 32 - 3\ log_7 49$

$b)\ log_2 8 +\ log_3 27 +\ log_5 125$

$c)\ log_5 625 -\ log_9 81 + log_8 64$

R: $a)\ 2\ log_4 4^2 +\ log_2 2^5 - 3\ log_7 7^2 = 2 \cdot 2 + 5 - 3\ \cdot 2 = 3$

$b)\ log_2 2^3 +\ log_3 3^3 +\ log_5 5^3 = 3 + 3 + 3 = 9$

$c)\ log_5 5^4 -\ log_9 9^2 + log_8 8^2 = 4 - 2 + 2 = 4$

1. Desarrolla las siguientes expresiones algebraicas:

$a)\ log_3 \dfrac{a^2 b^5\ c}{d^2}$

R: $log_3 a^2 +\ log_3 b^5 + log_3 c - log_3 d^2 = 2\ log_3 a + 5\ log_3 b +\ log_3 c -\ 2\ log_3 d$

$b)\ log_2 \dfrac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$

R: $log_2 a^3 + log_2 \sqrt[5]{b^6} - log_2 \sqrt[3]{c^7} = 3\, log_2 a + \frac{6}{5}\, log_2 b - \frac{7}{3}\, log_2 c$

$c)\ log_{10} \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{y^2 \cdot z^3}}$

R: $log_{10} x + log_{10} \sqrt{x} - log_{10} \sqrt{y^2} - log_{10} \sqrt{z^3}$

$= log_{10} x + \frac{1}{2}\, log_{10} x - log_{10} y - \frac{3}{2}\, log_{10} z$

$= \frac{3}{2}\, log_{10} x - log_{10} y - \frac{3}{2}\, log_{10} z$

Cambio De Base De Un Logaritmo.

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{log_x b}{log_x a}}$$

Ejemplo:

Calcula el $\boldsymbol{log_3 4}$, si sabemos que $\boldsymbol{log_2\ 3 = 1{,}585}$.

Primero: Se realiza un cambio de base.

$$log_3 4 = \frac{log_2 4}{log_2 3}$$

Segundo: Se sustituyen el numerador y el denominador por sus valores.

$$log_3 4 = \frac{log_2 4}{log_2 3} = \frac{log_2 2^2}{log_2 3} = \frac{2}{1{,}5850} = 1{,}2618$$

Ejercicios propuestos:

1.- Si $\log e = 0{,}4343$, ¿cuánto vale $\ln 10$?

R: $\log e \cdot \ln 10 = 1 \rightarrow \ln 10 = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3026$

2.- Expresa en función de logaritmos neperianos, y obtén el resultado con la calculadora.

$a)\ log_5 36^2$

R: $log_5 36^2 = log_5 6^4 = 4 \cdot \frac{\ln 6}{\ln 5} = 4{,}4531$

$b)\ log_2 \sqrt{31}$

R: $log_2 \sqrt{31} = log_2 31^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log_2 31 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 31}{\ln 2} = 2{,}4771$

$c)\ log_6 100$

R: $log_6 100 = log_6 10^2 = 2\, log_6 10 = 2 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 6} = 2{,}5702$

$d)\ log_4 31^5$

R: $log_4 31^5 = 5\, log_4 31 = 5 \cdot \frac{\ln 31}{\ln 4} = 12{,}3855$

2. Si el valor del logaritmo decimal de 2 es 0,301 y el de 5 es 0,699, calcula el valor de los siguientes logaritmos decimales.

$a)$ $log20$

R: $\log 20 = \log\ (2\ \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0{,}301 + 1 = 1{,}301$

$b)$ $log0{,}125$

R: $\log 0{,}125 = \log \frac{1}{8} = \ \log \frac{1}{2^3} = \log 2^{-3} = \ -3 \log 2 = (-3) \cdot 0{,}301 = \ -0{,}903$

$c)$ $log\ 1{,}250$

R: $\log 1{,}250 = \log(10 \cdot 5^3) = \log 10 + \log\ 5^3\ = 1 + 3 \log 5 = 1 + 3 \cdot 0{,}699 = 3{,}097$

$d)$ $log1{,}6$

R: $\log 1{,}6 = \log \frac{16}{10} = \log 16 - \log 10 =$

$= \log 2^4 - 1 = 4 \log 2 - 1$

$= 4 \cdot 0{,}301 - 1 = 0{,}204$

$e)\ \ log 0{,}2$

R: $\log 0{,}2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}3010 - 1 = \ -0{,}699$

$f)\ log 0{,}04$

R: $\log 0{,}04 \ \ = \log \frac{4}{100} = \log\ 4 - \log 100 = \log\ \ 2^2\ - \log\ 10^2\ =$

$= 2 \log 2 - 2 \log 10 = 2 \cdot 0{,}3010 - 2 = \ -1{,}398$

3. Determina el valor de x en las siguientes ecuaciones:

NOTA:

$\boldsymbol{log_b x = log_b y \quad \rightarrow \quad x = y}$

$\boldsymbol{a^x = a^y \quad \rightarrow \quad x = y}$

$a)\ \ log\, x = log\, 5 - log\, 2$

R: $\log\ x = \log\ (5 \cdot 2) \rightarrow \ \ \log x = \log 10\ \rightarrow \quad x = 10$

$b)\ \ log\, x^3 = log\ \ 6 +\ 2\, log\, x$

R: $\log x^3 = \log\ 6 +\ 2 \log x\ \rightarrow \quad 3 \log x - 2 \log x = \log 6\ \rightarrow\ (3-2)\ \log x = \log 6$

$\log x = \log 6\ \ \rightarrow \ \ x = 6$

c) $log\ (3x+5)=2$

R: $\log(3\mathrm{x}+10)=2 \ \rightarrow \ \log\ (3\mathrm{x}+5)=\log 100 \ \rightarrow \ 3\mathrm{x}+10=100$

$3\mathrm{x}=100-10 \ \rightarrow \ 3\mathrm{x}=90 \ \rightarrow \ \mathrm{x}=\frac{90}{3}=30$

d) $log\left(\frac{x}{100}\right)=log\,10^4-log\ x$

R: $\log\left(\frac{x}{100}\right)=\log 10^4-\log\ x \ = \ \log\left(\frac{x}{100}\right)= \ \log\left(\frac{10.000}{x}\right)$

$\frac{x}{100}=\frac{10.000}{x} \ \rightarrow \ x^2=1.000.000 \ \rightarrow \ x^2=10^6 \ \rightarrow \ x=1.000$

e) $3\,log_2\,(x-1)= \ log_2\,8$

R: $3\log_2(\mathrm{x}-1)= \ \log_2 8 \ \rightarrow \ \log_2(x-1)^3=\log_2 8 \ \rightarrow \ (x-1)^3=8$

$(x-1)^3=2^3 \ \rightarrow \ x-1=2 \ \rightarrow \ x=3$

f) $log\frac{2x+1}{x-1}=0$

R: $\log\frac{2x+1}{x-1}=0 \ \rightarrow \ \log\frac{2x+1}{x-1}=\log 1 \ \rightarrow \ \frac{2x+1}{x-1}=1 \ \rightarrow \ 2x+1=x-1$

$2x-x= \ -1-1 \ \rightarrow \ x= \ -2$

BIBLIOGRAFIA

- Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M., y Reyes, R.. “Matemáticas Simplificadas”, Segunda edición. Prentice Hall. ISBN: 9786074423488, 2009.
- Gaztelu, A., González, A. “Matemáticas Solucionario 4 ESO”, Santillana Educación S. L., ISBN: 9788429409550, 2008.
- Gaztelu, A., González, A. “Matemáticas Solucionario 3 ESO”, Santillana Educación S. L., ISBN: 9788429409505, 2007.